总习题一

1.1　求行列式$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}$的元素$a$，$b$，$c$的代数余子式.

1.2　求行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$最后一列元素的代数余子式之和.

1.3　计算下列行列式.

（1）$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

（2）$D=\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

（3）$D=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$；

（4）$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$；

（5）$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；

（6）$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & 4 & 9 & a^2 \\ 1 & -8 & 27 & a^3 \end{vmatrix}$；

（7）$D_n=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$；

（8）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & n \end{vmatrix}$；

（9）$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$；

（10）$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$；

（11）$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$，其中$a\neq b$.

1.4　求解下列方程.

（1）$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$；　　（2）$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 & x^2-1 \\ 1 & 3 & -1 & -8 \\ 2 & x^2-5 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$.

1.5　利用克莱姆法则求解下列方程组.

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=3, \\ x_1-x_2+3x_3=0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=-2; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2=4, \\ -x_2+3x_3=-1; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-2, \\ 4x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$

1.6　利用克莱姆法则求解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a+b+c, \\ ax_1+bx_2+cx_3=a^2+b^2+c^2, \\ bcx_1+cax_2+abx_3=3abc, \end{cases}$$

其中a,b,c是互不相同的实数.

1.7　λ为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=3, \end{cases}$$

有唯一解？

1.8　问λ何值时，下列方程组有非零解.

（1）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ (2-\lambda)x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3=0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} \lambda x_1+x_2=0, \\ x_3+2x_4=0, \\ x_1+\lambda x_3=0, \\ 2x_1-x_4=0. \end{cases}$

1.9　设齐次方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+bx_2+x_3=0, \\ x_1+2bx_2+x_3=0, \end{cases}$ 问当 a,b 满足什么条件时，齐次方程组

（1）只有零解？　　　　　　　　　　（2）有非零解？

1.10　求方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}=0$ 的全部根.

1.11　已知 a,b,c 不全为零，证明齐次方程组 $\begin{cases} ax_2+bx_3+cx_4=0, \\ ax_1+x_2=0, \\ bx_1+x_3=0, \\ cx_1+x_4=0, \end{cases}$ 只有零解.

总习题一答案

1.1　元素 a 的代数余子式：$bc-1$；

元素 b 的代数余子式：$ac-1$；

元素 c 的代数余子式：$ab-1$.

1.2　-1.

1.3　（1）$D=10$；　　　　　　（2）$D=1-x^2-y^2$；

（3）$D=(1-a)(a^2+1)$；　　　　　（4）$D=-8$；

（5）$D=0$；　　　　　　（6）$D=-30(a-1)(a+2)(a-3)$；

（7）$D_n=(n-1+x)(x-1)^{n-1}$，

提示：将第二、三、……、n 列的各元素加到第一列的对应元素上去，提出公因子 $(n-1+x)$，再将第一行元素乘以（-1）加到第二、三、……、n 行的对应元素上去，化成上三角行列式进行计算；

（8）$D_n=6(n-3)!$，

提示：先提出第三行的公因子 3, 再将第一列各元素乘以（-1）加到第二、三、……、n 列的对应元素上去, 然后按第三行进行展开, 得到的结果中的行列式再按第一列进行展开；

（9） $D_n=(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]$，

提示：将第一行各元素乘以（ -1 ）加到第二、三、……、n 行的对应元素上去，再按第一列进行展开即可；

（10） $D_n=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$，

提示：将第二行各元素乘以（ -1 ）加到第三、四、……、n 行的对应元素上去，并按第一列展开，再将结果中的 $(n-1)$ 阶行列式的第二、三、……、n 行的各元素加到第一列的对应元素上去，然后按第一列展开；

（11） $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$，

提示：应用数学归纳法，$D_1=a+b$；$D_2=(a+b)^2-ab=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$；将 D_3 按第一列展开得 $D_3=(a+b)D_2-abD_1=\dfrac{a^4-b^4}{a-b}$；假设 $n\le k-1$ 时，$D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$ 成立，则当 $n=k$ 时，将 D_k 按第一列展开得

$$D_k=(a+b)D_{k-1}-abD_{k-2}=\frac{(a+b)(a^k-b^k)}{a-b}-\frac{ab(a^{k-1}-b^{k-1})}{a-b}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b},$$

从而归纳出结果.

1.4　（1） $x=2$ 或 $x=1\pm\sqrt{3}$；　　（2） $x=\pm 1$ 或 $x=\pm 3$.

1.5　（1） $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=\dfrac{1}{7}, \\ x_3=-\dfrac{2}{7}; \end{cases}$　　（2） $\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{5}, \\ x_2=1, \\ x_3=-\dfrac{6}{5}; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3}, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = -\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}, \\ x_2 = \dfrac{8}{3}, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

1.6 $x_1 = a$， $x_2 = b$， $x_3 = c$.

1.7 $\lambda \neq -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

1.8 （1）$\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$； （2）$\lambda = \dfrac{1}{4}$.

1.9 （1）$a \neq 1$且$b \neq 0$； （2）$a = 1$或$b = 0$.

1.10 $x = 1, 2, 3, \cdots, n-1$.

1.11 提示：方程组的系数行列式值为$-(a^2 + b^2 + c^2)$.