例 2.1 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 化为行最简形.

解 对矩阵作初等行变换，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 2.2 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$ 化为行最简形.

解 $$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & -3 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 2.3 求解线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+x_2+2x_3=-1,\\ 2x_1-3x_2-x_3=2.\end{cases}$

解 对方程组的增广矩阵作初等行变换，

$$(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & -1 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\end{array}\right),$$

因此方程组的解为 $$\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3},\\ x_2=-1,\\ x_3=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

例 2.4 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+2x_3+x_4=0, \\ -x_1+2x_2-2x_3-x_4=0. \end{cases}$

解 因方程组的常数项全为零，故只需对系数矩阵做初等行变换，即

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}，其中 x_4 为自由未知量.$$

例 2.5 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4=4, \\ x_1+x_2+x_3-4x_4=-2, \\ x_1+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

解 对增广矩阵作初等行变换将其化为行最简形, 即

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

则此方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-2x_3+x_4+1, \\ x_2=x_3+3x_4-3, \end{cases}$$

其中 x_3,x_4 为自由未知量.

例 2.6 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ -3x_1+2x_3-x_4=0, \\ -x_1+2x_2+x_4=-3. \end{cases}$

解 对增增广矩阵作初等行变换将其化为行最简形, 即

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

可得矛盾方程 $0=-5$, 故方程组无解.

例 2.7　已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$， $C=\begin{pmatrix}2&1\\-3&1\\1&2\end{pmatrix}$， $D=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，

$F=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，计算

（1） $A-2B$；

（2） AB， CFA；

（3） $A^2-B^2+2AB-2BA$；

（4） C^TD， D^TC.

解

（1） $A-2B=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&-2\\0&2&2\\6&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&5\\-1&-1&-1\\-5&-4&3\end{pmatrix}$；

（2） $AB=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&8&-4\\2&0&1\\4&1&-4\end{pmatrix}$，

$$CFA=\begin{pmatrix}2&1\\-3&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&-2&3\\-5&3&-2\\4&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-3&16\\-15&2&-14\\12&-3&14\end{pmatrix};$$

（3） $A^2=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&10\\-2&-2&-1\\5&-3&2\end{pmatrix}$，

$$B^2=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&2\\3&2&0\\0&6&-1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&5&4\\0&-1&2\\4&6&9\end{pmatrix},$$

$A^2-B^2+2AB-2BA$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 10 \\ -2 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 11 & 8 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 32 & 0 & -8 \\ -1 & -2 & -3 \\ 5 & -19 & -23 \end{pmatrix};$$

（4）$C^T D=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$,

$D^T C=(1,2,3)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=(-1,9)$.

例 2.8　设 A 为三阶方阵，且 $|A|=3$，求 $\left||A|A\right|$.

解　$\left||A|A\right|=|3A|=3^3|A|=3^3\times 3=81$.

例 2.9　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 且 $2X+B=A+3X$，求 X .

解　由已知条件可知， $X=B-A$，即

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

例 2.10　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$， $f(x)=2x^2+3x-1$，求 $f(A)$.

解　由已知，方阵 A 的多项式 $f(A)=2A^2+3A-E$，因

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

故

$$f(A)=2\times\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

例 2.11 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geq 2$ 为正整数，求 A^n-2A^{n-1}.

解 由于 $A^n-2A^{n-1}=(A-2E)A^{n-1}$，而

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

易见 $(A-2E)A=\mathbf{0}$，从而有 $A^n-2A^{n-1}=\mathbf{0}$.

例 2.12 设 $\alpha=(a,b,c)^T$，已知 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求 $(\alpha^T\alpha)^{10}$

解 由已知条件可知，

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(a,b,c)=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

即 $a^2=b^2=c^2=1$，且 $ab=-1,ac=1,bc=-1$，可解得

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ 或 } \alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

所以

$$\alpha^T\alpha=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3 \text{ 或 } \alpha^T\alpha=(-1,1,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=3,$$

因此 $$(\alpha^T\alpha)^{10}=3^{10}.$$

例 2.13 已知 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，设 $A=\alpha^T\beta$，求 A^n.

解 因为

$$A^n=(\alpha^T\beta)^n=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{n-1\text{个}}\beta,$$

又因为 $\beta\alpha^T=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$，故 $A^n=\alpha^T\times 3^{n-1}\times\beta=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}A$. 又

$$A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix},$$

从而有

$$A^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n-1}&\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}&3^{n-2}\\2\cdot 3^{n-1}&3^{n-1}&2\cdot 3^{n-2}\\3^n&\frac{3^n}{2}&3^{n-1}\end{pmatrix}.$$

例 2.14 设 n 阶方阵 A，B 满足 $A^2=A$，$B^2=B$，$(A+B)^2=A+B$，证明：$AB=\mathbf{0}$.

解 由已知条件，

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A+AB+BA+B=A+B,$$

即

$$AB+BA=\mathbf{0}, \qquad (1)$$

用 A 左乘（1）式，得

$$A^2B+ABA=AB+ABA=\mathbf{0}, \qquad (2)$$

再用 A 右乘（1）式，得

$$ABA+BA^2=ABA+BA=\mathbf{0}, \qquad (3)$$

用（2）式减去（3）式，得

$$AB-BA=\mathbf{0},$$

即 $AB=BA$，代回（1）式，可得

$$AB=\mathbf{0}.$$

例 2.15 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=a\neq 0$，而 A^* 是 A 的伴随矩阵，求 $|A^*|$.

解 由 $AA^*=|A|E$，从而有

$$|AA^*|=|A||A^*|=|A|^n,$$

又因$|A| = a \neq 0$得

$$|A^*| = |A|^{n-1} = a^{n-1}.$$

例 2. 16　设A, B均为n阶方阵，且$|A| = 3$，$|B| = 2$，求$|2A^*B^{-1}|$.

解　由$AA^* = |A|E$可得

$$|AA^*| = |A||A^*| = |A|^n,$$

又因$|A| = 3 \neq 0$, 则有$|A^*| = |A|^{n-1}$, 故

$$|2A^*B^{-1}| = 2^n |A^*||B^{-1}| = 2^n \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = 6^{n-1}.$$

例 2. 17　设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解　因为A的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

且

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

故有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

例 2. 18　已知$AX = B$，其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$，求$X$.

解　因为A的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}-4\neq 0,$$

则 A 可逆，又 $AX=B$，则有 $X=A^{-1}B$.

由于 $A^{*}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，从而有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

因此

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3}{2} & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

例 2. 19 已知 $XA=B-2E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，求 X .

解 因 $|A|=3\neq 0$，且 $XA=B-2E$，则有

$$X=(B-2E)A^{-1}=\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

例 2. 20 已知 3 阶方阵 A 满足

$$A^{2}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -2 & 6\end{pmatrix},\quad A^{3}=\begin{pmatrix}-5 & -3 & 9\\ -3 & -2 & 6\\ 9 & 6 & 17\end{pmatrix},$$

求 A.

解 因 $A^3-A^2=(A-E)A^2$，则有 $(A-E)=(A^3-A^2)(A^2)^{-1}$，又因

$$|A^2|=\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&1&-2\\-3&-2&6\end{vmatrix}=1\neq 0,\quad A^3-A^2=\begin{pmatrix}-7&-4&12\\-4&-3&8\\12&8&11\end{pmatrix},\quad (A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

从而

$$A=\begin{pmatrix}-7&-4&12\\-4&-3&8\\12&8&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&1\\35&35&32\end{pmatrix}.$$

例 2. 21 设方阵 A 满足 $A^2+3A-4E=\mathbf{0}$，证明：$A+E$ 可逆，并求 $(A+E)^{-1}$.

证 由 $A^2+3A-4E=\mathbf{0}$ 可得

$$A^2+A+2A+2E-6E=A(A+E)+2(A+E)-6E=\mathbf{0},$$

则有
$$\left[\frac{1}{6}(A+2E)\right](A+E)=E,$$

又因
$$\left|\frac{1}{6}(A+2E)\right||A+E|=|E|=1\neq 0,$$

从而 $|A+E|\neq 0$，故 $A+E$ 可逆, 且

$(A+E)^{-1}=\dfrac{1}{6}(A+2E)$.

例 2. 22 已知 A 为三阶方阵，B 为四阶方阵，且 $|A|=5$，$|B|=-6$，$C=\begin{pmatrix}A&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&B\end{pmatrix}$，

求 $|C|$.

解 $|C|=|A||B|=-30$.

例 2. 23 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, 又

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 2.24 设$C=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & A\\ B & \mathbf{0}\end{pmatrix}$，其中$A$为$n$阶可逆矩阵，$B$为$m$阶可逆矩阵，求$C^{-1}$.

解 设$C^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ A_2 & A_4\end{pmatrix}$，则$CC^{-1}=E$，即

$$\begin{pmatrix}AA_3 & AA_4\\ BA_1 & BA_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & E\end{pmatrix},$$

则有

$$AA_3=E,\quad AA_4=\mathbf{0},\quad BA_1=E,\quad BA_2=\mathbf{0},$$

由A，B均可逆可得

$$A_1=\mathbf{0},\quad A_2=B^{-1},\quad A_3=A^{-1},\quad A_4=\mathbf{0},$$

从而有

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B^{-1}\\ A^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

例 2.25 设$C=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，其中$a_i\neq 0$（$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$），

求C^{-1}.

解　对C进行分块，设$C=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & A\\ B & \mathbf{0}\end{pmatrix}$，则$C^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B^{-1}\\ A^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$.

由于

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n}\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{a_n},$$

所以

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{pmatrix}.$$

例 2.26　设A，B均为n阶可逆方阵，$C=\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}$，求

（1）C^{-1}；　　　　　　　　　　（2）C^{*}.

解　（1）$C^{-1}=\begin{pmatrix}A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B^{-1}\end{pmatrix}$；

（2）$C^{*}=|C|C^{-1}=\begin{vmatrix}A & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{vmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A||B|A^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & |A||B|B^{-1}\end{pmatrix}$.

例 2.27　设A为三阶方阵，且$|A|=3$，求分块矩阵$D=\begin{pmatrix}A^{-1}A^{T} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A^{*}\end{pmatrix}$的行列式.

解　由于

$$|D|=|A^{-1}A^{T}A^{*}|=|A^{-1}||A^{T}||A^{*}|=|A^{*}|,$$

又
$$AA^{*}=|A|E=3E,$$

从而有
$$|AA^{*}|=|A||A^{*}|=|3E|=3^{3},$$

则
$$|A^{*}|=9,$$

故
$$|D|=9.$$

例 2.28 用初等行变换求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解 $$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\2&1&1&1&0&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&-1&1&1&-2&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-1&0\\0&1&-1&-1&2&0\\0&0&2&-1&2&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{2}&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{2}&3&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{array}\right),$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-2&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&3&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 2.29 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求 $(A^{*})^{-1}$.

解 由 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$，有 $\frac{A}{|A|}A^{*}=E$，则 $(A^{*})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，又 $|A|=10$，故

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

例 2.30 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，求初等矩阵 X，使 $XA=B$.

解 矩阵

$$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$$

相当于先将矩阵 A 的第一行各元素加到第三行的对应元素上去，再将第一行和第二行互换得到，而上面两种变换对应的初等矩阵依次为

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\text{和}P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

即 $P_2P_1A=B$，因此有

$$X=P_2P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.31 设 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^5.

解 由 $AP=PB$ 可知

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix};$$

$$A^5 = PBP^{-1}PBP^{-1}\cdots PBP^{-1} = PB^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$