第一章　行列式典型例题解答

例 1. 1　计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 4\end{vmatrix}$.

解　由定义

$$D=\begin{vmatrix}2 & 7\\ -1 & 4\end{vmatrix}=2\times4-7\times(-1)=15.$$

例 1. 2　求解线性方程组 $\begin{cases}x_1-3x_2=2,\\ 2x_1+x_2=-1.\end{cases}$

解　$D=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-6)=7\neq0$，

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2-3=-1,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5,$$

故方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{7},\\ x_2=-\dfrac{5}{7}.\end{cases}$$

例 1. 3　设 $D=\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 1 & x\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$，求元素 x 的余子式及代数余子式.

解　元素 x 的余子式 $M_{23}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-4=2$，

代数余子式 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-2$.

例 1. 4　已知 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$，求

（1）$A_{11}+A_{12}+A_{13}$；

（2）$A_{11}+2A_{12}-2A_{13}$；

（3）$-2A_{12}+3A_{13}$.

解　（1）$A_{11}+A_{12}+A_{13}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=-8$；

（2）该式相当于将行列式D按第一行展开，故等于D的值，即

$$A_{11}+2A_{12}-2A_{13}=D=1\times(-2)\times 4=-8；$$

（3）该式相当于用行列式第二行各元素乘以第一行对应元素的代数余子式，因此

$$-2A_{12}+3A_{13}=0.$$

例 1.5　设三阶行列式D第一行元素分别为1，3，4，且第一行元素所对应的余子式的值分别为2，-1，3，求行列式D的值.

解　因$M_{11}=2$，$M_{12}=-1$，$M_{13}=3$，从而$A_{11}=2$，$A_{12}=1$，$A_{13}=3$，依行列式的定义，

$$D=1\times 2+3\times 1+4\times 3=17.$$

例 1.6　计算行列式$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 6 & 8\\ 5 & 7 & 10\end{vmatrix}$.

解　（法一）

依行列式的拉普拉斯（Laplace）展开定理，有

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 8\\ 7 & 10\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 8\\ 5 & 10\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 5 & 7\end{vmatrix}$$

$$=4+0-2=2.$$

一般情况下，行列式的展开选择按零元素最多的行或列进行.

（法二）

将第一列各元素同乘以（-1）分别加到第二列和第三列的对应元素上，再按第一行展开，即

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 6 & 8\\ 5 & 7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=2.$$

通常情况下，行列式的计算需要将行列式的性质和拉普拉斯（Laplace）展

开定理结合起来使用.

例 1.7　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 199 & 396 & -97\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}$.

解　该行列式的第二行元素均可看成是两个元素之和，即

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 199 & 396 & -97\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -1+200 & -4+400 & 3+(-100)\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 200 & 400 & -100\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=-100\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=200.$$

例 1.8　已知 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & x & x^2\end{vmatrix}$，证明至少存在一点 $\xi\in(2,5)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　因为

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & x & x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 21\\ 0 & x-2 & x^2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 21\\ x-2 & x^2-4\end{vmatrix}=3(x^2-7x+10),$$

显然函数 $f(x)$ 在 $[2,5]$ 上连续，在 $(2,5)$ 内可导，且 $f(2)=f(5)=0$，故由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(2,5)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 1.9　已知 $\begin{vmatrix}a_1+3b_1 & b_1 & 2c_1\\ a_2+3b_2 & b_2 & 2c_2\\ a_3+3b_3 & b_3 & 2c_3\end{vmatrix}=2$，计算 $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$.

解　由已知条件可得

$$\begin{vmatrix}a_1+3b_1 & b_1 & 2c_1\\ a_2+3b_2 & b_2 & 2c_2\\ a_3+3b_3 & b_3 & 2c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 2c_1\\ a_2 & b_2 & 2c_2\\ a_3 & b_3 & 2c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b_1 & b_1 & 2c_1\\ 3b_2 & b_2 & 2c_2\\ 3b_3 & b_3 & 2c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 2c_1\\ a_2 & b_2 & 2c_2\\ a_3 & b_3 & 2c_3\end{vmatrix}=2D=2,$$

因此所求行列式值为 $$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=1.$$

例 1.10 设四阶行列式 D 的第三列元素分别为 2，-1，3，0，且第三列元素所对应的余子式分别为 4，-3，5，2，计算行列式 D 的值.

解 由已知，

$$M_{13}=4，\ M_{23}=-3，\ M_{33}=5，\ M_{43}=2，$$

则 $$A_{13}=4，\ A_{23}=3，\ A_{33}=5，\ A_{43}=-2，$$

又 $$a_{13}=2，\ a_{23}=-1，\ a_{33}=3，\ a_{43}=0，$$

依行列式的 Laplace 展开式定理有

$$D=2\times4+(-1)\times3+3\times5+0\times(-2)=20.$$

例 1.11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 该行列式为上三角行列式，则

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=24.$$

例 1.12 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 将第一行各元素乘以（-1）后，分别加到第二、三、四行的对应元素上去，再按第一列进行展开，即

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix};$$

再将第一列元素乘以(-1)后加到第三列的对应元素上，然后按第二行展开，

则有

$$D=\begin{vmatrix}0&-2&-2\\-2&0&0\\-2&-2&2\end{vmatrix}=-2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&2\end{vmatrix}=-16.$$

例 1.13 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&2&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&4\end{vmatrix}$.

解 先提出第三行的公因子3，再将第一列各元素乘以(-1)后加到第二、三、四列的对应元素上去，然后按第三行展开，即

$$D=\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&2&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&3&3&3\\3&2&3&3\\1&1&1&1\\3&3&3&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&2&2&2\\3&-1&0&0\\1&0&0&0\\3&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=3\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=6.$$

例 1.14 设$f(x)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}$，其中$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$为常数，求方程$f(x)=0$的根.

解 将第一行各元素乘以（-1）后分别加到第二、三、四行的对应元素上去，再从第二、三、四行中都提出公因子x，即

$$f(x)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\x&0&0&-x\end{vmatrix}=x^3\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\0&0&1&-1\\0&1&0&-1\\1&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=x^3\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_1+a_2+a_3+a_4+x\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x^3(a_1+a_2+a_3+a_4+x)=0,$$

故方程的根为$x=0$或$x=-(a_1+a_2+a_3+a_4)$.

例 1.15 求解方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & x^2-1 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 16 \\ 3 & 3 & 5 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 将第一行各元素乘以（-3）后分别加到第二、三、四行的对应元素上去，再按第一列展开，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & x^2-1 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 16 \\ 3 & 3 & 5 & x^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & x^2-4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & x^2-12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2-4 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & x^2-12 \end{vmatrix}$$

$$=-4(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)=0,$$

故方程的根为$x=\pm 2$或$x=\pm 4$.

例 1.16 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ x & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解 将行列式第二、三、…、n列各元素均加到第一列的对应元素上去，提出公因子（$(n-1)x+a$）后，再将第一行各元素乘以（-1）后分别加到第二、三、…、n行的对应元素上去，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ x & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}=[(n-1)x+a]\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & a & x & \cdots & x \\ 1 & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)x+a]\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-x \end{vmatrix}=[(n-1)x+a](a-x)^{n-1}.$$

例 1.17　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$.

解　有些 n 阶行列式，直接应用展开定理和行列式的性质计算比较复杂，此时可以选择用数学归纳法进行计算.

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=4\cos^2\alpha-1,$$

注意到结果中含中三角函数，在分子和分母上同乘 $\sin\alpha$，应用三角公式进行化简，从而有

$$D_2=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha};$$

当 $n=3$ 时，将 D_3 按第一列展开得

$$D_3=2\cos\alpha\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=2\cos\alpha D_2-D_1$$

$$=2\cos\alpha\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-2\cos\alpha=\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha};$$

假设当 $n\le k+1$ 时，$D_n=\dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ 都成立，则当 $n=k$ 时，将行列式按第一列展开得

$$D_k=2\cos\alpha D_{k-1}-D_{k-2}=2\cos\alpha\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin(k+1)\alpha+\sin(k-1)\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha},$$

由数学归纳法可得

$$D_n=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

例 1.18　用克莱姆法则求解方程组 $\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3=5, \\ x_1+3x_2-5x_3=5, \\ -x_1+4x_2+x_3=9. \end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}-1&2&3\\1&3&-5\\-1&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&3\\0&5&-2\\0&2&-2\end{vmatrix}=6\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&2&3\\5&3&-5\\9&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&2&3\\0&1&-8\\0&\frac{2}{5}&-\frac{22}{5}\end{vmatrix}=-6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}-1&5&3\\1&5&-5\\-1&9&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&5&3\\0&10&-2\\0&4&-2\end{vmatrix}=12,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}-1&2&5\\1&3&5\\-1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&5\\0&5&10\\0&2&4\end{vmatrix}=0,$$

由克莱姆法则得方程组的解为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=-1,\\x_2=\dfrac{D_2}{D}=2,\\x_3=\dfrac{D_3}{D}=0.\end{cases}$

例 1.19 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases}x_1+ax_2+a^2x_3+a^4x_4=1,\\x_1+2x_2+4x_3+8x_4=1,\\x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\x_1+cx_2+c^2x_3+c^3x_4=1,\end{cases}$$

其中 $a\neq c$， $a,c\neq -1$ 且 $a,c\neq 2$.

解 应用范德蒙行列式的结果，系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&a&a^2&a^3\\1&2&4&8\\1&-1&1&-1\\1&c&c^2&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&2&-1&c\\a^2&4&1&c^2\\a^3&8&-1&c^3\end{vmatrix}.$$

设 $x_1=a$， $x_2=2$， $x_3=-1$， $x_4=c$， 则

$$D=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\left(x_4-x_1\right)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

$$=(2-a)(-1-a)(c-a)(-1-2)(c-2)(c+1)$$

$$=-3(a+1)(c+1)(a-2)(c-2)(c-a)\neq 0,$$

又

$$D_1=D, \qquad D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2 & a^3\\ 1 & 1 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & a & 1 & a^3\\ 1 & 2 & 1 & 8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & c & 1 & c^3\end{vmatrix}=0, \quad D_4=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & c & c^2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

故方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1,\\ x_2=0,\\ x_3=0,\\ x_4=0.\end{cases}$

例 1.20 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x+y+2z=1,\\ 2x+ay+z=2,\\ x+y+az=-2.\end{cases}$$

问 a 为何值时，方程组有唯一解？

解 非齐次线性方程组有唯一解的条件是系数行列式 $D\neq 0$，即

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & a-2 & -3\\ 0 & 0 & a-2\end{vmatrix}=(a-2)^2\neq 0,$$

故当 $a\neq 2$ 时，方程组有唯一解.

例 1.21 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda-1)x+y+2z=0,\\ (\lambda+1)y=0,\\ x+3y+\lambda z=0.\end{cases}$$

问 λ 何值时，方程组必有非零解.

解 齐次线性方程有非零解的充分必要条件是系数行列式 $D=0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0,$$

故当$\lambda=-1$或$\lambda=2$时，方程组有非零解.

例 1.22 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 1 \\ 8 & -1 & -27 & 1 \end{vmatrix}$.

解 应用范德蒙行列式的结果，设$x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=-3$，$x_4=1$，则

$$D=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$$

$$=(-1-2)(-3-2)(1-2)(-3+1)(1+1)(1+3)=240.$$