总习题三

3.1　求下列矩阵的秩以及最高阶非零子式.

（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\2&4&3\end{pmatrix}$；　（2）$A=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$；

（3）$A=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\1&1&2&2\\1&1&0&4\end{pmatrix}$；　（4）$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&-8&7&-1\\5&3&-14&11&-2\end{pmatrix}$.

3.2　问k取何值时可使矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&k&-k\\1&2&0&3\end{pmatrix}$的秩为$2$.

3.3　问k取何值时可使矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&k&2\\0&1&1&3\\1&-1&0&4\\2&0&2&5\end{pmatrix}$的秩为3.

3.4　问λ取何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$

（1）只有零解；（2）有非零解，并求出非零解.

3.5　问λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_3=\lambda,\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3,\end{cases}$

（1）无解；（2）有解，并求出解.

3.6　问a,b取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4=a,\\x_2+2x_3+2x_4=3,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=b,\end{cases}$

（1）无解；（2）有解，并在有解时求出解.

3.7　设方程组$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+x_3+x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$试问$a$取何值时，方程组有非零解，并求解.

3.8　设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$，讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关性.

3.9　讨论向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\3\\t\end{pmatrix}$的线性相关性.

3.10　设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$，问$\beta$能否由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，若能，并写出线性表达式.

3.11　设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\k\end{pmatrix}$，试问：

（1）k为何值时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关？

（2）k为何值时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关？并将$\alpha_3$表示成$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合.

3.12　求下列向量组的秩和一个最大无关组，并将其余向量由最大无关组线性表示

（1）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-7\\1\\4\end{pmatrix}$；

（2）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-2\\8\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$；

（3）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\2\end{pmatrix}$.

3.13　求下列齐次线性方程组的一个基础解系

（1）$\begin{cases}-3x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+x_3-3x_4=0;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x_1+7x_2-8x_3+9x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0,\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\ 5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=0;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=0,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0.\end{cases}$

3.14　求下列非齐次线性方程组的通解

（1）$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\ 4x_1+x_2+2x_3=3,\\ 6x_1+x_2+4x_3=5;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_4=2,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=3,\\ 2x_1+4x_2+x_3+4x_4=5,\\ 3x_1+6x_2+2x_3+5x_4=8;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-3x_4=6,\\ x_2+x_3-2x_4=5,\\ x_1+2x_2+3x_3-5x_4=11,\\ x_1+3x_2+4x_3-7x_4=16;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+5x_4+x_5=2,\\ x_1+x_2+x_3+5x_4=0,\\ x_1+x_2+2x_3+8x_4+x_5=1,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+13x_4+2x_5=3.\end{cases}$

3.15　设 A 是 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\3&5&4\end{pmatrix}$，求 $r(BA)$.

3.16　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=\mathbf{0}$，求 t 的值.

3.17　设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则下列三条直线

$$\begin{aligned}l_1:&\quad a_1x+b_1y+c_1=0\\ l_2:&\quad a_2x+b_2y+c_2=0\\ l_3:&\quad a_3x+b_3y+c_3=0\end{aligned}$$

（其中 $a_i^2+b_i^2\neq0$，$i=1,2,3$）交于一点 $\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，α_1,α_2 线性无关.

3.18　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，求证：当 $m>n$ 时，行列式 $|AB|=0$.

总习题三答案

3.1 （1）$r(A)=3$，最高阶非零子式 $D_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\2&4&3\end{vmatrix}=-6$；

（2）$r(A)=4$，最高阶非零子式 $D_4=\begin{vmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{vmatrix}=189$；

（3）$r(A)=3$，最高阶非零子式 $D_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&2\\1&1&0\end{vmatrix}=2$；

（4）$r(A)=2$，最高阶非零子式 $D_2=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$.

3.2 $k=2$.

3.3 $k=1$.

3.4 （1）$\lambda\neq1$；（2）$\lambda=1$，通解为 $x=c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

3.5 （1）当 $\lambda\neq1$ 时，方程组无解；

（2）当 $\lambda=1$ 时，方程组有解，且为无穷多解，通解表达式为

$$x=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}，\ c\text{ 为任意常数.}$$

3.6 （1）当 $a\neq0$ 或 $b\neq2$ 时方程组无解；

（2）当 $a=0$ 且 $b=2$ 时方程组有解，解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}，\ c_1,c_2\text{ 为任意常数.}$$

3.7 当 $a=0$ 时，方程组有非零解，通解表达式为

$$x=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}，\ c_1,c_2,c_3\text{为任意常数}.$$

当$a=-10$时，方程组也有非零解，通解表达式为

$$x=c\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\\1\end{pmatrix}，\ c\text{为任意常数}.$$

3.8　线性相关.

3.9　当$t\neq 1$时向量组线性无关；当$t=1$时向量组线性相关.

3.10　β能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

3.11　（1）$k\neq 5$；

（2）$k=5$，$\alpha_3=\frac{11}{7}\alpha_1+\frac{1}{7}\alpha_2$.

3.12　（1）$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为最大无关组，且$\alpha_3=-2\alpha_2$；

（2）$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，其中$\alpha_1,\alpha_2$为最大无关组，

且$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{7}{2}\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$；

（3）$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=4$，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$为最大无关组，

且$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$.

3.13　（1）$x=k\eta$，$k\in R$，其中$\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$；

（2） $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2$， $k_1,k_2\in R$，其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\ \frac{19}{17}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{13}{17}\\ -\frac{20}{17}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

（3） $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2$， $k_1,k_2\in R$，其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}5\\ -6\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

（4） $x=k\eta$， $k\in R$，其中 $\eta=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

3.14 （1） $x=\eta^*+k\eta$， $k\in R$，其中 $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$， $\eta=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$；

（2） $x=\eta^*+k_1\eta_1+k_2\eta_2$， $k_1,k_2\in R$，其中 $\eta^*=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$， $\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$， $\eta_2=\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$；

（3） $x=\eta^*+k_1\eta_1+k_2\eta_2$， $k_1,k_2\in R$，其中 $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$， $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$， $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

（4） $x=\eta^*+k_1\eta_1+k_2\eta_2$， $k_1,k_2\in R$，其中 $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$， $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$， $\eta_2=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

3.15 $r(BA)=2$.

提示：首先要明确初等行变换不改变矩阵的秩. 而$|B|=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\3&5&4\end{vmatrix}=4\neq 0$，则$BA$即为$A$左乘可逆矩阵$B$，等价于对$A$进行若干次初等行变换，因此秩不变.

3. 16　$t=-3$.

提示：B为三阶非零矩阵，且$AB=\mathbf{0}$，设$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，其中$\beta_i$（$i=1,2,3$）为3维非零列向量，因此$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$必有非零解，因此$|A|=0$，即$\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=0$，可得$t=-3$.

3. 17　证明：略.

提示：三条直线交于一点$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$有唯一解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2$（系数矩阵的秩＝增广矩阵的秩＝未知量的个数）

$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关.

3. 18　证明：略.

提示：$r(AB)\le\min(r(A),r(B))$，当$m>n$时可知AB为$m\times m$矩阵且

$r(AB)\le\min(r(A),r(B))<n<m$进而有$|AB|=0$.