**例 3.1** 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ 的秩.

**解** （解法一）由定义可知，矩阵的秩即为矩阵中最高阶非零子式的阶数，而该矩阵的子式的最高阶数为 3，首先考虑 $A$ 是否存在 $3$ 阶非零子式.

由于

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 7\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

由最高阶非零子式的阶数为 $3$，故 $r(A)=3$.

（解法二）对矩阵 $A$ 进行初等行变换，将其化为行阶梯形，即

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

非零行的行数为 $3$，故 $r(A)=3$.

**例 3.2** 求下列矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的秩，以及它的一个最高阶非零子式.

**解** 由于初等行变换不改变矩阵的秩，所以一般采用初等行变换法求矩阵的秩.

先求矩阵的秩. 为此，对 $A$ 施以初等行变换，将其化为行阶梯形.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故矩阵的秩 $r(A)=3$.

再求 $A$ 的一个最高阶非零子式.

在 $A$ 中取第$1$，$2$ 行和第$1$，$2$ 列可得非零子式

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0,$$

则 $D_2$ 即为所求.

**例 3.3** 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-3&-6&-9\end{pmatrix}$，求 $r(A)$ 及 $r(A^*)$.

**解** 由于 $A$ 的三行元素对应成比例，因此 $|A|=0$，而且任意 2 阶子式均为零，又因为存在一

阶非零子式 $D_1=1\neq 0$，因此可知 $r(A)=1$.

因为 $A^*$ 中的元素为 $A$ 中的元素所构成的二阶子式，从而

$$A^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

进而有 $r(A^*)=0$.

**例 3.4** 设 $A$ 为 5 阶方阵，且 $r(A)=2$，求 $r(A^*)$.

**解** 由 $r(A)=2$ 可知，矩阵 $A$ 的最高阶非零子式是 2 阶的，因此任意 $r$ 阶子式 $(r\geq 3)$ 均为零.

由于 $A$ 为 5 阶方阵，且 $A^*=\left(A_{ij}\right)_{5\times 5}$ 其中 $A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，则 $A_{ij}$ 为 $A$ 的 4 阶子式

易得 $A_{ij}=0\,(1\leq i,j\leq 5)$，因此 $A^*=\mathbf{0}$，因此 $r(A^*)=0$.

**例 3.5** 设 $A=\begin{pmatrix}4&8&12&k\\3&6&9&6\\1&2&3&2\end{pmatrix}$，问 $k$ 取何值时，可使（1）$r(A)=1$；（2）$r(A)=2$.

**解** $A=\begin{pmatrix}4&8&12&k\\3&6&9&6\\1&2&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&2\\3&6&9&6\\4&8&12&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&0&0&k-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

可得

（1）当 $k-8=0$，即 $k=8$ 时，可使 $r(A)=1$；

（2）当 $k-8\neq 0$，即 $k\neq 8$ 时，可使 $r(A)=2$.

**例 3.6**　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3-k & 0 \\ k-2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，问 $k$ 取何值时，可使

（1）$r(A)=2$；

（2）$r(A)=3$.

**解**　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3-k & 0 \\ k-2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-k & -2 \\ 0 & -1 & 4-k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 3-k & -2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & (k-2)(k-5) \end{pmatrix}$

故（1）当 $(k-2)(k-5)=0$，即 $k=2$ 或 $k=5$ 时，可使 $r(A)=2$；

（2）当 $k\neq 2$ 且 $k\neq 5$ 时，可使 $r(A)=3$.

**例 3.7**　设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，且 $R(A)=3$，求 $\lambda$ 的值.

**解**　（解法一）

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & (1-\lambda)(2+\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

由于 $r(A)=3$，可知

$$\begin{cases} (1-\lambda)(3+\lambda)=0 \\ 1-\lambda\neq 0 \end{cases},$$

解得 $\lambda=-3$.

（解法二）由于 $r(A)=3$，则 $|A|=0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1)^3 = 0$$

可得$\lambda=-3$或$\lambda=1$.

当$\lambda=-3$时，将其代入矩阵可得

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得此时$r(A)=3$；

当$\lambda=1$时，将其代入矩阵可得

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得此时$r(A)=1$，故$\lambda=1$舍去，因此$\lambda=-3$.

**例 3.8** 问$\lambda$取何值时齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \end{cases}$有非零解.

**解** （解法一）

将系数矩阵化为行阶梯形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

由于齐次线性方程组有非零解，故$r(A)<3$.为使$r(A)<3$必有$\lambda-1=0$，即$\lambda=1$.

故当$\lambda=1$时齐次线性方程组有非零解.

（解法二）由于齐次线性方程组有非零解的充要条件为系数行列式$D=0$，

即

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0,$$

故当$\lambda-1=0$时，也即$\lambda=1$时，齐次线性方程组有非零解.

小结：对含参数的线性方程组解的情况分析

（1）方程个数与未知量个数相等时可以用系数行列式讨论，当系数行列式$|A|\neq 0$时，可用克莱姆法则求解.

（2）方程个数与未知量个数不等或未知量个数超过 3 时，一般采用将增广矩阵作初等行变换化为行阶梯形，然后再利用系数矩阵的秩和增广矩阵的秩的关系对参数讨论方程组是否有解，有解时求出解.

例 3.9　设非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0,\\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=1,\\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4=a,\end{cases}$$

问$a$取何值时，方程组（1）无解；（2）有解，并求出通解.

**解**　因非齐次线性方程组的增广矩阵

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & -1 & a\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & -5 & 1 & 5 & a\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1\end{array}\right)$$

（1）当$a-1\neq 0$，即$a\neq 1$时，$r(A)\neq r(A \mid b)$，则方程组无解；

（2）当$a-1=0$，即$a=1$时，$r(A)=r(A \mid b)=2<4$，则方程组有解，且有无穷多解.

此时

$$(A \mid b)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

得方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{5}x_3 + \dfrac{2}{5}, \\ x_2 = \dfrac{1}{5}x_3 + x_4 - \dfrac{1}{5}, \end{cases}$$ 其中 $x_3$， $x_4$ 为自由未知量.

**例 3.10** 证明非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_1 = a_4, \end{cases}$ 有解的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 0$.

**证明** （必要性）将此 4 个方程加起来可得 $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 0$.

（充分性）非齐次线性方程组的增广矩阵

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{4} a_i \end{array}\right)$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 0$ 时， $r(A) = r(A \mid b) = 3 < 4$，故非齐次线性方程组有解.

例 3.11 设方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -k & 15 \\ 1 & -5 & -10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ l \end{pmatrix},$$

问 $k, l$ 各取何值时，方程组（1）无解；（2）由唯一解；（3）有无穷多解，并求出其一般解.

解 将增广矩阵化为行阶梯形

$$B = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & l \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -k+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & l+5 \end{array}\right)$$

（1）由于方程组无解的充要条件是 $r(B) \neq r(A)$，可得

当 $2 - k \neq 0$ 时，也即 $k \neq 2$ 时，无论 $l$ 取何值，均有 $r(B) = r(A)$；

当 $k = 2$ 时，将增广矩阵继续进行行变换可得

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l+5 \end{pmatrix}$$

因此$l+5\neq 0$，即$l\neq -5$. 所以当$k=2$，且$l\neq -5$时，方程组无解；

（2）由（1）可知

（i）当$k=2$，且$l=-5$时，方程组有解，且有$r(B)=r(A)=3<4$，故此时方程组有无穷多解；

（ii）当$k\neq 2$时，无论$l$取何值均有方程组有解.

易见，当$k\neq 2$时，无论$l$取何值，均有$r(B)=r(A)=4$，此时方程组有唯一解

所以当$k\neq 2$时，无论$l$取何值，方程组有唯一解；

（3）由以上结论可知当$k=2$，且$l=-5$时，方程组有解且有无穷多解，继续将增广矩阵化为行最简形可得

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得一般解为

$$\begin{cases} x_1=-8, \\ x_2=3-2x_3, \text{其中 } x_3 \text{ 为自由未知量.} \\ x_4=2, \end{cases}$$

**例 3.12** 设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解，求$a$的值以及所有公共解.

**解** 由题设可知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1, \end{cases}$有解，将增广矩阵化为行阶梯形可得

$$B=\left(A\;\vdots\;b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{pmatrix}$$

当$a-2\neq 0$，即$a\neq 2$时，可将增广矩阵$B$继续施以初等行变换可得

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&0&a-1\end{pmatrix}$$

由于非齐次线性方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相等，所以有$a-1=0$，也即$a=1$.

将$a=1$代入原方程组，可将增广矩阵化为行最简形

$$B=\left(A\;\vdots\;b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&1&0\\1&4&1&0\\1&2&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&3&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}，其中 x_3 为自由未知量.$$

当然$a-2=0$，也即$a=2$时，可将增广矩阵$B$化为行最简形可得

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=1,\\x_3=-1.\end{cases}$

**例 3.13**　设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1,\end{cases}$问$a,b$为何值时，方程组

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解，并求出解.

**解**　先将增广矩阵化为行阶梯形

$$B=\left(A \,\vdots\, b\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}$$

易得

（1）当$a-1\neq0$，也即$a\neq1$时，无论$b$取何值时，

均有$r(B)=r(A)=4$，此时方程组必有唯一解；

（2）当$a-1=0$且$b+1\neq0$时，也即$a=1$且$b\neq1$时，

有$r(B)=3$，而$r(A)=2$，此时方程组无解；

（3）当$a-1=0$且$b+1=0$时，也即$a=1$且$b=1$时，

有$r(B)=r(A)=2<4$，此时方程组有无穷多解.

将$a=1$和$b=-1$代入原方程组中，将其增广矩阵化为行最简形可得

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4,\\x_2=1-2x_3-2x_4,\end{cases}\text{其中 } x_3,x_4 \text{ 为自由未知量.}$$

**例 3.14**　设$2(\alpha_1-\beta)-3(\alpha_2+\beta)=\alpha_2$，其中$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，求$\beta$.

**解**　由题意知 $2\alpha_1-2\beta-3\alpha_2-3\beta=\alpha_2$，整理可得 $5\beta=2\alpha_1-4\alpha_2$，即

$$\beta=\frac{2}{5}\alpha_1-\frac{4}{5}\alpha_2=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{8}{5}\\-\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

**例 3.15** 设 $\beta-\beta_1=\beta_2-\beta$，其中 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}k\\m\\-2\end{pmatrix}$，求 $k$，$m$ 值.

**解** 由题意知 $2\beta=\beta_1+\beta_2$，即 $2\begin{pmatrix}k\\m\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$，亦即 $\begin{pmatrix}2k\\2m\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}$，

故 $2k=6$，$2m=1$，进而可得 $k=3$，$m=\frac{1}{2}$.

**例 3.16** 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$, 问 $\beta$ 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，若能写出表示式.

**解** 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，则

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \beta)=(A\ \vdots\ \beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\2&3&0&5\\1&2&-1&3\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\0&1&-2&1\\0&1&-2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&2\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&3&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

由于

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2=r(B)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$，则 $\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，

且

$$\begin{cases}x_1=-3x_3+1,\\x_2=2x_3+1,\end{cases}$$ 其中 $x_3$ 为自由未知量

令 $x_3=0$ 可得非齐次线性方程组的一个解

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=1,\\x_3=0,\end{cases}$$

故 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$.

**例 3. 17**　设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}$，问 $\beta$ 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，若能，写出表示式.

**解**　设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$，则

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=(A\ \vdots\ \beta)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&4&6\\-1&1&0&-1&0\\1&1&2&3&4\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&4&6\\0&3&3&3&6\\0&-1&-1&-1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&4&6\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&1&2&2\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

易得

$$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2\text{；}\ r(B)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=2\text{；}\ r(A)=r(B)$$

则 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示且

$$\begin{cases}x_1=2-x_3-2x_4,\\x_2=2-x_3-x_4,\end{cases}$$ 其中 $x_3$，$x_4$ 为自由未知量.

令 $x_3=0$，$x_4=0$，可得线性方程组的一个解

$$\begin{cases}x_1=2,\\x_2=2,\\x_3=0,\\x_4=0,\end{cases}$$

则

$$\beta=2\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3+0\alpha_4=2\alpha_1+2\alpha_2.$$

**例 3. 18**　设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性.

**解**　设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\mathbf{0}$，则

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

由于$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，方程组只有零解，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

**例 3.19** 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$，讨论向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性相关性.

解 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\mathbf{0}$，则

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&3&4&-2\\1&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&1&2&-2\\0&-1&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&1&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2<4$，方程组有非零解，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

**例 3.20** 设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\a\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\a\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$线性相关，且$a\neq1$，求$a$的值.

解 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\mathbf{0}$，则

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&2&3&4\\1&1&2&3\\1&a&1&2\\1&a&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&2&3&4\\1&a&1&2\\1&a&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&0&-1&-2\\0&a-1&-1&-1\\0&a-1&a-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&a-1&-1&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&a-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&a-1&-1&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&-2a+1\end{pmatrix}$$

由于$a\neq1$，可见只有当$-2a+1=0$，也即$a=\frac{1}{2}$时，

才有$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<4$，此时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

**例 3.21**　已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$及$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$，

（1）问$a,b$为何值时，$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示；

（2）问$a,b$为何值时，$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，且表达式唯一，并求出该表达式.

**解**　设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，则

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

当$a+1\neq0$，即$a\neq-1$时，$r(A)=r(B)=4$，方程组有唯一解；

当$a+1=0$且$b\neq0$时，$r(A)=2$，$r(B)=3$，此时方程组无解. 因此

（1）当$a=-1$且$b\neq0$时，$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示；

（2）当$a\neq-1$时，$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，且表达式唯一.

现对矩阵$B$继续施以初等行变换，将其化为行最简形，

$$B\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&1&0&\frac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&-1&0&1\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\dfrac{-2b}{a+1}\\0&1&0&0&\dfrac{a+b+1}{a+1}\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-2b}{a+1},\\x_2=\dfrac{a+b+1}{a+1},\\x_3=\dfrac{b}{a+1},\\x_4=0,\end{cases}$$

可得线性表达式为 $\beta=\dfrac{-2b}{a+1}\alpha_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\dfrac{b}{a+1}\alpha_3+0\alpha_4$.

例 3.22　设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，问 $\lambda$ 取何值时，

（1） $\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（2） $\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表达式唯一；

（3） $\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示但表达式不唯一.

解　$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，则

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1+\lambda&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&-\lambda^2(1+\lambda)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&-\lambda(\lambda^2+2\lambda-1)\end{pmatrix}$$

可见

（1）当$\begin{cases}-\lambda(\lambda+3)=0,\\-\lambda(\lambda^2+2\lambda-1)\neq 0,\end{cases}$即$\lambda=-3$时，

有$r(A)=2<r(B)=3$，方程组无解，此时$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

（2）当$\begin{cases}-\lambda(\lambda+3)\neq 0,\\-\lambda(\lambda^2+2\lambda-1)=0,\end{cases}$即$\lambda=1\pm\sqrt{2}$时，

有$r(A)=r(B)=3$，方程组有唯一解，此时$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表达式唯一；

（3）当$\begin{cases}-\lambda(\lambda+3)=0,\\-\lambda(\lambda^2+2\lambda-1)=0,\end{cases}$即$\lambda=0$时，

有$r(A)=r(B)=2<3$，方程组有无穷多解，此时$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示但表达式不唯一.

**例 3.23**　设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

**证明**　易知 $\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4=0$，则向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关.

**例 3.24**　设$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

**证明**　设$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，即 $x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$，整理可得$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$，由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

因此

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\\x_3=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$$

故向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

**例 3.25** 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关且$\alpha_3$不能由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，证明：$\alpha_1,\alpha_2$线性相关.

**证明** （反证法）假设$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$\alpha_3$必能由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，这与已知条件矛盾，故假设不成立，也即$\alpha_1,\alpha_2$线性相关.

**例 3.26** 设$A$为$n$阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$n$维列向量，$\boldsymbol{\alpha_1} \neq \mathbf{0}$，且$A\alpha_1 = k\alpha_1$，$A\alpha_2 = l\alpha_1 + k\alpha_2$，$A\alpha_3 = l\alpha_2 + k\alpha_3\ (l \neq 0)$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

**证明** 设$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}$，用$(A-kE)$左乘上式可得

$$x_1(A-kE)\alpha_1 + x_2(A-kE)\alpha_2 + x_3(A-kE)\alpha_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(A\alpha_1 - k\alpha_1) + x_2(A\alpha_2 - k\alpha_2) + x_3(A\alpha_3 - k\alpha_3) = \mathbf{0},$$

也即$x_2 l\alpha_1 + x_3 l\alpha_2 = 0$，由于$l \neq 0$，则有$x_2\alpha_1 + x_3\alpha_1 = \mathbf{0}$，

再用$(A-kE)$左乘上式可得

$$x_2(A-kE)\alpha_1 + x_3(A-kE)\alpha_2 = \mathbf{0},$$

即$x_3 l\alpha_1 = 0$，由于$\alpha_1 \neq 0$，$l \neq 0$，可得$x_3 = 0$，代入可得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = 0$，

再用$(A-kE)$左乘上式可得

$$x_1(A-kE)\alpha_1 + x_2(A-kE)\alpha_2 = \mathbf{0},$$

即$x_2 l\alpha_1 = 0$，又$\boldsymbol{\alpha_1} \neq \mathbf{0}$，$l \neq 0$，则有$x_2 = 0$，同理可得$x_1 = 0$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

**例 3.27** 设$A$为$n$阶方阵，若存在正整数$k$，使线性方程组$A^k x = 0$有解向量$\alpha$，且$A^{k-1}\alpha \neq 0$，证明：向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$线性无关.

**证明** 设$x_1\alpha + x_2 A\alpha + \cdots + x_k A^{k-1}\alpha = 0$，由题设可知$A^k\alpha = 0$，且$A^{k-1}\alpha \neq 0$，则用$A^{k-1}$左乘上式可得$x_1 A^{k-1}\alpha \neq 0$，从而可得$x_1 = 0$，则上式变为$x_2 A\alpha + \cdots + x_k A^{k-1}\alpha = 0$，同理再用$A^{k-2}$左乘上式可得$x_2 A^{k-1}\alpha \neq 0$，从而可得$x_2 = 0$，以此类推可得$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$，因此向量组$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$线性无关.

**例 3.28** 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\0\end{pmatrix}$，

（1） 求向量组的秩；

（2） 求向量组的一个最大无关组；

（3） 把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示；

（4） 判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，并说明理由.

**解** （1）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\\2&-2&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-1&2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$；

（2）$\alpha_1$，$\alpha_3$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组；

（3）$\alpha_2=-\alpha_1$，$\alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_3$；

（4）由于 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2<4$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

**例 3.29** 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&3&-1&2\\2&5&0&3\end{pmatrix}$，求 $A$ 的列向量组的秩和一个最大无关组，并将其余不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

**解** $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&3&-1&2\\2&5&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-2&1\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&5&-1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，其中 $\alpha_1,\alpha_2$ 为最大无关组，且 $\alpha_3=5\alpha_1-2\alpha_2$，

$\alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2$.

例 3.30　设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ t+2 \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \\ t \end{pmatrix}$，

（1）问$t$为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，并在此时将向量$\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示；

（2）问$t$为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，并在此时求向量组的秩及一个最大无关组.

解

$$B = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & t+2 & t & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & t-7 & t+6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & t-9 & t-2 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 & 1-t \end{pmatrix}$$

（1）当$t-2 \neq 0$，即$t \neq 2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

此时，在对上面的行阶梯形继续施以初等行变换，可得

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 & 1-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{3t-4}{t-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1-t}{t-2} \end{pmatrix}$$

由此可得线性表达式为 $\alpha = 2\alpha_1 + \dfrac{3t-4}{t-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \dfrac{1-t}{t-2}\alpha_4$；

（2）当$t=2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，其最大无关组可取为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

**例 3. 31**　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维向量，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充要条件是任一$n$维向量均可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

**证明**　（必要性）对于任一$n$维向量$\alpha$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$为$n+1$个$n$维向量，则该向量组必线性相关. 又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，因此$\alpha$必可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

（充分性）由条件可知，$n$维单位坐标向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，显然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$能由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示，因此两向量组等价.

进而$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n$，因此向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

**例 3. 32**　已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且

$$\begin{cases}\alpha_1=\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4,\\ \alpha_2=-\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4,\\ \alpha_3=-\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4,\\ \alpha_4=-\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4,\end{cases}$$

求证：$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

**证明**　由于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表示，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，因此

$$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\geq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$$

又显然$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\leq 4$，因此$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=4$，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

**例 3. 33**　已知$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关的充

要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

**证明**　易得

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}.$$

记

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad |A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

则 $A$ 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix},$$

可见 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价.

因此 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

**例 3.34** 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4=0,\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2+3x_3-2x_4=0,\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4=0,\end{cases}$ 的通解并指出基础解系.

**解**

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\2&1&3&5\\1&-1&3&-2\\3&1&5&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\\0&-2&2&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4,\\x_2=x_3-3x_4,\end{cases}\text{其中 } x_3,x_4 \text{ 为自由未知量.}$$

即

$$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4,\\x_2=x_3-3x_4,\\x_3=x_3,\\x_4=x_4,\end{cases}$$

也即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

记

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 $\xi_1, \xi_2$ 为齐次线性方程组的基础解系，且方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2\ (k_1, k_2 \in R)$ .

例 3. 35　求非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$ 的通解.

解

$$B = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}, \\ x_4 = 0, \end{cases} \text{其中 } x_2, x_3 \text{ 为自由未知量，}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

也即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

记

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则通解为 $x = \eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2 \in R$，其中 $\xi_1, \xi_2$ 为所对应齐次线性方程组的基础解系.

例 3.36　设 $4$ 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 $3$，已知 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 为它的 $3$ 个解向量，且 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，求该方程组的通解.

解　由条件可知，此方程组所对应的齐次线性方程组的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$.

设该非齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{A}\eta_1 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\eta_2 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}\eta_3 = \boldsymbol{b}$，

则 $\eta_1 - \eta_2$ 和 $\eta_1 - \eta_3$ 为所对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，

从而 $(\eta_1 - \eta_2) + (\eta_1 - \eta_3)$ 也为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

又

$$(\eta_1 - \eta_2) + (\eta_1 - \eta_3) = 2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

则 $2\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3)$ 为所对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故原方程组通解为

$$x=\eta_1+k[2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)]=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad k\in R.$$

**例 3.37** 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$，而 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，求 $Ax=\beta$ 的通解.

**解** 由条件知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_4$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组，因此 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，进而可知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$ 个.

又 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$，即 $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4=\mathbf{0}$，

即

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=0,$$

可得

$$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\text{为 }\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\text{ 的一个非零解，}$$

进而可得 $\xi$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

再由条件 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，

可知

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\beta$$

可得

$$\eta^*=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\text{为 } Ax=\beta \text{ 的一个特解.}$$

因此所求非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=\eta^*+k\xi=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\text{，其中 } k\in R.$$

**例 3.38** 设 $\eta^*$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 为所对应齐次线性方程组

的一个基础解系，证明：

（1）$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关。

**证明** （1）设 $k\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0}$，

两边左乘 $A$，因 $A\xi_i=\mathbf{0}$（$i=1,2,\cdots,n-r$），可得 $kA\eta^*=\mathbf{0}$，进而可得 $k=0$.

再由 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 为所对应齐次线性方程组的一个基础解系，可得 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 必线性无关，进而可得 $k_i=0$（$i=1,2,\cdots,n-r$），故 $\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，得证.

（2）设 $k\eta^*+k_1(\eta^*+\xi_1)+\cdots+k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=\mathbf{0}$，

即

$$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0}$$

两边左乘 $A$，因 $A\xi_i=\mathbf{0}$（$i=1,2,\cdots,n-r$），

可得

$$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})A\eta^*=\mathbf{0},$$

进而可得

$$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0.$$

再由$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为所对应齐次线性方程组的一个基础解系，可得$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$必线性无关，进而可得$k_i=0$（$i=1,2,\cdots,n-r$），故$k=0$，因此$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关，得证.

例 3.39　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，$\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$\beta_2=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$，$\beta_3=k_1\alpha_3+k_2\alpha_1$，其中$k_1,k_2$为实常数，试问$k_1,k_2$满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

解　显然$\beta_i$（$i=1,2,3$）为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，因此$\beta_i$（$i=1,2,3$）也为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

现要证$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

设有$x_1,x_2,x_3$使得等式$x_1\boldsymbol{\beta_1}+x_2\boldsymbol{\beta_2}+x_3\boldsymbol{\beta_3}=\boldsymbol{0}$成立，

将$\beta_i$（$i=1,2,3$）代入上式，化简可得

$$(x_1k_1+x_3k_2)\alpha_1+(x_1k_2+x_2k_1)\alpha_2+(x_2k_2+x_3k_1)\alpha_3=\boldsymbol{0},$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，进而可得

$$\begin{cases} x_1k_1+x_3k_2=0, \\ x_1k_2+x_2k_1=0, \\ x_2k_2+x_3k_1=0, \end{cases}$$

由题设可知该方程组只有零解，即系数行列式非零，即

$$|A|=\begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_1+k_2 & k_1+k_2 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_1 \end{vmatrix}$$

$$=(k_1+k_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_1 \end{vmatrix}=(k_1+k_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k_1-k_2 & -k_2 \\ 0 & k_2 & k_1 \end{vmatrix}$$

$$=(k_1+k_2)(k_1^2-k_1k_2+k_2^2)=(k_1+k_2)[(k_1-\frac{1}{2}k_2)^2+\frac{3}{4}k_2^2]\neq 0$$

进而可得$k_1+k_2\neq 0$，即$k_1\neq -k_2$.

**例 3.40** 若$3$阶非零矩阵$B$的每一列都是方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \end{cases}$的解，求$\lambda$的值以及

$|B|$.

解 由于$B$非零，因此齐次线性方程组有非零解，故系数矩阵的秩$r(A)<3$，因而将系数矩阵化为行阶梯形，可得

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

因此可得当$\lambda-1=0$，即$\lambda=1$.

再将$\lambda=1$代入原方程组，将系数矩阵化为行最简形可得

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=0, \\ x_2=x_3, \text{其中 } x_3 \text{ 为自由未知量}, \\ x_3=x_3, \end{cases}$$

即通解为

$$x=x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

记

$$x_3=k,\quad \eta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则通解为

$$x=k\eta \text{（}k\text{ 为任意常数）}.$$

设$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则$\beta_i$均可由$\eta$线性表示，因此

$$r(B)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=1,$$

所以$|B|=0$.

**例 3.41** 设齐次线性方程组$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(1+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}$（$n\geq 2$）

试问$a$取何值时，该方程组有非零解？并求出一般解.

**解** 本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组，可考虑将系数矩阵化为行阶梯形，再讨论其秩是否小于$n$，进而讨论该方程组是否有非零解；或者直接计算系数行列式，根据题设系数行列式的值必为零，由此可对参数$a$的可能取值进行讨论即可.

（解法一）对系数矩阵进行初等行变换，可得

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$$

当$a=0$时，$r(A)=1<n$，此时方程组有非零解，且通解为

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_2-\cdots-x_n,\\ x_2=x_2,\\ \quad\vdots\\ x_n=x_n,\end{cases}$$

可表为

$$x=x_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

记

$$x_2=c_1,x_3=c_2,\cdots,x_n=c_{n-1},$$

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\eta_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

则方程组通解为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-1}\eta_{n-1}\text{，其中}c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}\text{为任意常数.}$$

当$a\neq 0$时，继续对系数矩阵进行初等行变换，可得

$$A\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2}&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

可知当$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时，$r(A)=n-1<n$，此时方程组有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\\qquad\vdots\\-nx_1+x_n=0,\end{cases},$$

也即

$$\begin{cases}x_1=x_1,\\x_2=2x_1,\\x_3=3x_1,\\\quad\vdots\\x_n=nx_1,\end{cases}$$

可表为

$$x=x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}\text{，记}x_1=c\text{，}\eta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix},$$

则通解为

$$x=c\eta\text{，其中}c\text{为任意常数.}$$

（解法二）方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a+\frac{n(n+1)}{2} & a+\frac{n(n+1)}{2} & a+\frac{n(n+1)}{2} & \cdots & a+\frac{n(n+1)}{2}\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}$$

$$=(a+\frac{n(n+1)}{2})\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{vmatrix}=(a+\frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$$

当$|A|=0$，即$a=0$或$a=-\frac{n(n+1)}{2}$时，方程组有非零解.

通解的解法与解法一相同，此处略.