总习题二

2.1 把下列矩阵化为行最简形.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -6 & -7 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 7 \\ 9 & 9 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2　利用矩阵的初等行变换求解下列方程组.

（1）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3=-1, \\ 5x_1+x_2-x_3=4; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ -3x_1+4x_2+x_3=-1, \\ 4x_1-3x_2-2x_3=3; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=1, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=2, \\ x_1-2x_2+x_3-7x_4=1; \end{cases}$

（5）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ -x_1+2x_2-4x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=0; \end{cases}$　　（6）$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+2x_4-x_5=1, \\ -2x_1+x_2+3x_3-3x_4+5x_5=4, \\ 4x_1-5x_2+3x_3+7x_4-7x_5=-2. \end{cases}$

2.3　设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 2x-1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

2.4　已知 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$，$f(x)=x^2-4x+1$，求 $f(A)$.

2.5　已知 $A=(1,-1,1)$，$B=(2,0,1)^T$，$C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，

（1）计算 AB，B^TA^T，AC，DB；

（2）设 $F=BA$，求 $|F|$；

（3）$f(x)=2x^2-3x+1$，求 $f(F)$.

2.6　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $n\ge 2$ 为正整数，求 A^n-2A^{n-1}.

2.7　已知 $\alpha=(1,-1,2)$， $\beta=(1,2,1)^T$，设 $A=\beta\alpha$，计算 A^n.

2.8　设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n.

2.9　计算

（1）$\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2$；　　（2）$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$；

（3）$(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n$.

2.10　求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-3&1\\0&4&-3\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&-2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&0&1&2\\3&2&0&2\\0&1&2&3\end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&3&2&-1\\1&1&0&4\\2&0&1&6\end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&2&0\\0&4&-2&2\\0&7&3&-1\end{pmatrix}$；　　（6）$\begin{pmatrix}-1&3&0&0\\3&5&0&0\\0&0&2&1\\0&0&7&3\end{pmatrix}$.

2.11　解下列矩阵方程.

（1）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$，且有 $AXA+BXB=AXB+BXA$，求 X.

（2）已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，且 $X=AX+B$，求 X .

（3）已知 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，且 $A(E-C^{-1}B)^T C^T=E$，求 A.

（4）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求矩阵 B.

2.12　设 A，B 都是 n 阶对称矩阵，$E+AB$ 是可逆矩阵，证明 $(E+AB)^{-1}A$ 是对称矩阵.

2.13　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且 $A^*X=A^{-1}+2X$，求 X

2.14　设三阶方阵 A， B 满足 $A^2B-A-B=E$，且

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

求 B 及 $|B|$.

2.15　设 A， B 都是 n 阶方阵，并且 B 和 $E+AB$ 都可逆，证明

$$B(E+AB)^{-1}B^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A.$$

2.16　设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+E=0$，证明 $A-2E$ 可逆.

2.17　设 A 为 n 阶非零实数方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，当 $A^*=A^T$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

2.18　如果 A， B 为同阶方阵，且 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，证明： $A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$.

总习题二答案

2.1　（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{26}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{17} \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

2.2　（1）无解；

（2）$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{7} + \frac{5}{7}x_3, \\ x_2 = \frac{5}{7} + \frac{2}{7}x_3, \end{cases}$ 其中 x_3 为自由变量；

（3）$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2, \\ x_3 = 0, \end{cases}$ 其中 x_2 为自由变量；

（4）$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + x_4, \\ x_2 = -\frac{3}{10} - \frac{8}{5}x_4, \\ x_3 = -\frac{1}{10} + \frac{14}{5}x_4, \end{cases}$ 其中 x_4 为自由变量；

（5）$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_5, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_5, \\ x_3 = \frac{1}{2}x_5, \\ x_4 = -\frac{1}{2}x_5, \end{cases}$ 其中 x_5 为自由变量；

（6）$\begin{cases} x_1 = -3+3x_3-\dfrac{4}{3}x_4+3x_5, \\ x_2 = -2+3x_3+\dfrac{1}{3}x_4+x_5, \end{cases}$ 其中 x_3, x_4, x_5 为自由变量.

2.3　$f(A)=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2.4　$f(A)=\begin{pmatrix} a^2-4a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-4b+1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2-4c+1 \end{pmatrix}$.

2.5　（1）$AB=3$，$B^TA^T=3$，$AC=(-1,3,2)$，$DB=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$；

（2）$|F|=0$；

（3）$f(F)=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.6　$A^n-2A^{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

提示：$A(A-2E)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}\times A(A-2E)$.

2.7　$A^n=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

提示：$A^n=(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)=\beta(\alpha\beta)\cdots(\alpha\beta)\alpha=A$.

2.8　$A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

提示：$A=\alpha^T\alpha$，其中 $\alpha=(1,0,1)$，且 $\alpha\alpha^T=2$，

$A^n=(\alpha^T\alpha)(\alpha^T\alpha)\cdots(\alpha^T\alpha)=\alpha^T\underbrace{(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T)}_{n-1}\alpha=2^{n-1}A$.

2.9 （1）$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（3）$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$；

（4）$\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$，［提示：用数学归纳法］.

2.10 （1）$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} \frac{7}{22} & \frac{5}{22} & \frac{1}{22} \\ -\frac{1}{22} & -\frac{7}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} & -\frac{15}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{11}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & \frac{23}{25} & -\frac{13}{25} \\ -\frac{4}{5} & \frac{6}{25} & \frac{22}{25} & -\frac{7}{25} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{25} & \frac{13}{25} & -\frac{3}{25} \end{pmatrix}$

（5）$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{9}{16} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{13}{16} & \frac{11}{32} & -\frac{5}{16} \end{pmatrix}$；　　（6）$\begin{pmatrix} -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} & 0 & 0 \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2.11 （1）$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　（2）$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$；

（3）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}$；

（4）$B=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$，

提示：用 A^* 左乘等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，再用 A 右乘等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，得 $A^*AB=A^*B+3A^*A$，即 $|A|B=A^*B+3|A|E$，因 $|A^*|=|A|^3=8$，则有 $2B=A^*B+6E$，故 $B=6(2E-A^*)^{-1}$.

2.12　证明略.

2.13　$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

2.14　$B=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$|B|=\frac{1}{2}$.

2.15　提示：等式左边 $B(E+AB)^{-1}B^{-1}$ 可以写成 $\left[B(E+AB)B^{-1}\right]^{-1}$，即证 $\left[B(E+AB)B^{-1}\right]^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$.

2.16　证明略.

2.17　反证法，假设 $|A|=0$，由 $A^*A=|A|E$，及 $A^*=A^T$，可得 $A^TA=|A|E=\mathbf{0}$，因 A 为实方阵，可推得 $A=\mathbf{0}$，这与已知的 A 为非零实矩阵矛盾，故 $|A|\neq 0$.

2.18　提示：$A^2=A\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}(B+E)\right]^2=\frac{1}{2}(B+E)$.