例 4.1　设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

（1）求$\|\alpha\|$，$\|\beta\|$，$\|\gamma\|$及(α,β)，(α,γ)；

（2）问α与β及α与γ是否正交，并将α，β，γ单位化.

解　（1）$\|\alpha\|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$；

$\|\beta\|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$；

$\|\gamma\|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$；

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=(1,3,1)\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$(\alpha,\gamma)=\alpha^T\gamma=(1,3,1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$$

（2）α与β正交，α与γ正交，

$$\alpha^0=\frac{\alpha}{\|\alpha\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{3}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{11}}\end{pmatrix};\quad \beta^0=\frac{\beta}{\|\beta\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix};\quad \gamma^0=\frac{\gamma}{\|\gamma\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

例 4.2　求与$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$均正交的单位向量。

解　设所求向量为$\gamma=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由题意知，$(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)=0$

即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+x_2-x_3=0,\end{cases}$$

系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=x_2\\x_3=0\end{cases}，即\gamma=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

记$\gamma_1=\pm\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，将$\gamma_1$单位化可得 $\gamma_1^0=\pm\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$即为所求.

例 4. 3 试将下列向量组化为标准正交向量组。

（1）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$；

解 先正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix};$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-0\beta_1-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix};$$

再将β_1,β_2,β_3单位化，令

$$\xi_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}\end{pmatrix};$$

$$\xi_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2\sqrt{5}}{5}\\\frac{\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix};$$

$$\xi_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{1}{3}\sqrt{5}\end{pmatrix};$$

则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 即为所求.

例 4. 4 判断下列矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 是否为正交矩阵.

解 （法一）$A^T=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$A^TA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

可知 A 为正交矩阵.

（法二）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

且 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\|\alpha_3\|=1$，$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$，

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为标准正交向量组，故 A 为正交矩阵.

例 4. 5　设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，非零向量 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均正交， 试证向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

证明　设 $k\beta + k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + k_3\boldsymbol{\alpha_3} + k_4\boldsymbol{\alpha_4} = \mathbf{0}$，

两边与 β 作内积，注意到

$$(\alpha_i, \beta) = 0，（i = 1,2,3,4），$$

可得

$$k(\beta, \beta) = 0，$$

由于 β 为非零向量，可得 $k = 0$，进而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + k_3\boldsymbol{\alpha_3} + k_4\boldsymbol{\alpha_4} = \mathbf{0}，$$

又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

因此 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

例 4. 6　设 A 为正交矩阵，证明：A^* 为正交矩阵.

证明　由 $|A| = \pm 1 \neq 0$，可知 A 可逆，而由

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

知

$$A^* = |A|A^{-1}$$

因此

$$\begin{aligned} A^*(A^*)' &= (|A|A^{-1})(|A|A^{-1})' = |A|^2 A^{-1}(A^{-1})' \\ &= |A|^2 (A'A)^{-1} = (A'A)^{-1} = E^{-1} = E \end{aligned}$$

例 4. 7　设 α 为 n 维列向量且 $\alpha^T\alpha = 1$，令 $A = E - 2\alpha\alpha^T$，求证 A 为对称的正交矩阵.

证明　由于

$$\begin{aligned} A^T &= (E - 2\alpha\alpha^T)^T = E^T - 2(\alpha\alpha^T)^T \\ &= E - 2\alpha\alpha^T = A \end{aligned}$$

因此 A 为对称矩阵. 又

$$
\begin{aligned}
A^T A &= (E-2\alpha\alpha^T)^2 \\
&= E-2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T+4(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) \\
&= E-4\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\
&= E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T = E
\end{aligned}
$$

因此 A 为正交矩阵.

例 4.8 求下列矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

解 求特征值与特征向量，一般先令 $|A-\lambda E|=0$，求出特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，然后再求解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其非零解即为对应于特征值 λ_i 的特征向量.

令 $|A-\lambda E|=0$，即

$$
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}
$$

$$
=(1-\lambda)[(5-\lambda)(1-\lambda)+4]=(1-\lambda)(3-\lambda)^2=0
$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$
A-E=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，可得基础解系\ \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},
$$

则 p_1 为 A 的对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量，而 k_1p_1（$k_1\neq 0$）为对应于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量;

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，由

$$
A-3E=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，可得基础解系\ p_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

则 p_2 为 A 的对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量，而 k_2p_2（$k_2\neq 0$）为对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的全部特征向量.

例 4.9 设 α,β 是矩阵 A 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，证明向量 $\alpha+\beta$ 不可能是矩阵 A 的特征向量.

证明 （反证法）假设$\alpha+\beta$是矩阵A的特征向量，则存在数λ_3使得

$$A(\alpha+\beta)=\lambda_3(\alpha+\beta)$$

而

$$A\alpha=\lambda_1\alpha，\quad A\beta=\lambda_2\beta$$

因此

$$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta$$

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta=\lambda_3(\alpha+\beta)$$

也即

$$(\lambda_1-\lambda_3)\alpha+(\lambda_2-\lambda_3)\beta=0$$

又因为α,β为属于不同特征值的特征向量，所以α,β线性无关，因此有

$$\lambda_1-\lambda_3=0，\quad \lambda_2-\lambda_3=0$$

进而有

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$$

这与条件$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾，故向量$\alpha+\beta$不可能是矩阵A的特征向量.

例 4.10 设λ是矩阵A的特征值，$\boldsymbol{x}$是A的对应于λ的特征向量

（1）证明：当A可逆时，$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值，$\boldsymbol{x}$是A^{-1}的对应于$\dfrac{1}{\lambda}$的特征向量；

（2）证明：当A可逆时，$\dfrac{|A|}{\lambda}$是A^*的特征值，$\boldsymbol{x}$是A^*的对应于$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量；

（3）设$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，证明$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值，$\boldsymbol{x}$是$f(A)$的对应于$f(\lambda)$的特征向量.

证明 （1）因为$|A|\neq 0$，所以$\lambda\neq 0$，

又 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$

两边同乘以A^{-1}可得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{-1}\lambda\boldsymbol{x}$

即 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$

因此$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值，$\boldsymbol{x}$是A^{-1}的对应于$\dfrac{1}{\lambda}$的特征向量.

（2）由于
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$$
可得
$$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$
则
$$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}$$
因此$\dfrac{|A|}{\lambda}$是A^{*}的特征值，$\boldsymbol{x}$是A^{*}的属于$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

（3）由于
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{x}$$
$$=\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$$
$$=\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_1\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_2\lambda^2\boldsymbol{x}+\cdots+\boldsymbol{a}_n\lambda^n\boldsymbol{x}$$
$$=(\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1\lambda+\boldsymbol{a}_2\lambda^2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\lambda^n)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\lambda)\boldsymbol{x}$$
因此结论成立.

例 4.11 设方阵A满足$A^2=A$，证明A的特征值只能是0或1.

证明 设λ为A的任一特征值，$\boldsymbol{x}$是与λ所对应的特征向量，
则
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$
因此
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\lambda(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^2\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$
即
$$\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\text{，}(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$
由于特征向量$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，所以$(\lambda^2-\lambda)=0$，即$\lambda=0$或$\lambda=1$，结论得证.

例 4.12 设n阶方阵A满足$A^2=3A$，证明：

（1）A的特征值只能是0或3；

（2）$A-4E$，$A+E$，$2A+3E$均可逆.

证明 （1）设λ为A的任一特征值，$\boldsymbol{x}$是与λ所对应的特征向量，
则
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\lambda(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^2\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=3\lambda\boldsymbol{x}$$

得

$$\lambda^2 \boldsymbol{x} = 3\lambda \boldsymbol{x}，\ (\lambda^2 - 3\lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

由于特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $(\lambda^2 - 3\lambda) = 0$，即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$.

（2）由（1）可知 $4, -1, -\dfrac{3}{2}$ 均不是 A 的特征值，

因此

$$|A - 4E| \neq 0$$

$$|A + E| = |A - (-1)E| \neq 0$$

$$|2A + 3E| = \left|2(A + \frac{3}{2}E)\right| = 2^n \left|A - (-\frac{3}{2})E\right| \neq 0，$$

所以 $A - 4E$， $A + E$， $2A + 3E$ 均可逆.

例 4.13 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，

（1）求 A 的特征值；

（2）求 $2A + E$ 的特征值；

（3）求 $E - A^{-1}$ 的特征值.

解 （1）令 $|A - \lambda E| = 0$，

即 $$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(-3-\lambda)(-1-\lambda) - 8] = -(\lambda+5)(\lambda-1)^2$$

从而可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -5$， $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

（2）由于 A 的特征值为 $\lambda_1 = -5$， $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，

因此 $2A + E$ 的特征值分别为

$$\mu_1 = 2\lambda_1 + 1 = -9，$$

$$\mu_2 = 2\lambda_2 + 1 = 3 = \mu_3.$$

（3）由于 A 的特征值为 $\lambda_1 = -5$， $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，

所以 A^{-1} 的特征值为

$$\lambda_1' = \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{5},$$

$$\lambda_2' = \frac{1}{\lambda_2} = 1 = \lambda_3',$$

进而可得$E - A^{-1}$的特征值为

$$\mu_1 = 1 - \frac{1}{\lambda_1'} = \frac{6}{5},$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{1}{\lambda_2'} = 0 = \mu_3.$$

例 4. 14 判断下列矩阵能否对角化，若能，请求出相似变换矩阵.

（1）$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

解 n阶方阵A可以对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量，从而判断三阶方阵是否能够对角化，只需求出其特征向量，看是否具有三个线性无关的特征向量即可.

（1） 令$|A - \lambda E| = 0$，即

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

可得A的特征值$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 1$.

对于$\lambda_1 = 2$，解$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，

由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};$$

对于$\lambda_2=3$，解$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

由

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可得基础解系

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};$$

对于$\lambda_3=1$，解$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可得基础解系

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

由于A有3个互异特征值，则方阵A可对角化，

相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}\\1&0&1\end{pmatrix}$，且$P$可逆，

使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（2）令$|A-\lambda E|=0$，即

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+1] = -(\lambda-2)^3 = 0$$

可得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，

由

$$A-2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}，$$

易得方阵 A 的线性无关特征向量只有 2 个，因此方阵 A 不能对角化.

例 4.15 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x, y.

解 此题有两种解法.

（解法一）由于 A 与 Λ 相似，所以 A 和 Λ 有相同的特征值，且 $|A| = |\Lambda|$，

即 $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3x-4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = 2y.$$

从而可得 $3x-4 = y$.

又因为 1 是 A 的特征值，即

$$|A-1E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1)-4 = 0$$

所以 $x = 3$，代入上式可得 $y = 5$.

（解法二） 由于 A 与 Λ 相似，所以 A 与 Λ 有相同的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = y$.

由于 $$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3，$$

即 $$3x-4 = y，$$

又　　　　$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，

即　　　　$x+5=3+y$，

联立可得　　$x=3$，$y=5$.

例 4.16　问 k 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & k\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 能够对角化？

解　因为一个三阶方阵能够对角化的充分必要条件是矩阵有三个线性无关的特征向量. 下面考虑 k 取何值时，A 能有三个线性无关的特征向量.

易得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$. 又由于不同的特征值对应的特征向量一定线性无关，因此只要求对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 有两个线性无关的特征向量，即齐次方程组

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有两个线性无关的解，即方程组的基础解系含有 2 个向量，

因此系数矩阵的秩 $r(A+E)=1$，

又

$$A+E=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以只有 $k=0$ 时，齐次线性方程才有两个线性无关的解，即 A 才可以对角化.

例 4.18　设 A,B 为 n 阶方阵，且 A 与 B 相似，证明 A^k 与 B^k 相似.（k 为正整数）

证明　因为 A 与 B 相似，故存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

成立. 因此

$$B^k=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=P^{-1}A^kP$$

所以 A^k 与 B^k 相似.

例 4.19　设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$，所对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

求 A.

解 由于 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 为属于不同特征值的特征向量，因此相似变换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

可逆，且

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

因此

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

例 4.20 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $A^5 - 3A^2$.

解 令 $|A - \lambda E| = 0$，得到特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 0$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 时，解 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

可得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_3 = 0$ 时，解 $(\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

可得基础解系为

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

相似变换矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

且使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}.$$

则 $A=P\Lambda P^{-1}$.

设 $f(x)=x^5-3x^2$，则 $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$，又

$$f(\Lambda)=\Lambda^5-3\Lambda^2=\begin{pmatrix}20&&\\&20&\\&&0\end{pmatrix},$$

进而

$$A^5-3A^2=f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=\begin{pmatrix}20&0&0\\0&10&10\\0&10&10\end{pmatrix}.$$

例 4.21 试求一个正交相似变换矩阵，将对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ 对角化.

解 令 $|A-\lambda E|=0$，即

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)^2(2-\lambda)=0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=4$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，
可得两线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

而且 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 正交，因此这里只需将 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 单位化可得

$$\xi_1=\frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \xi_2=\frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=2$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

将其单位化可得

$$\xi_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

取正交相似变换矩阵

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

使得

$$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

例 4.22 设3阶实对称矩阵A的特征值为$6,3,3$，与特征值6对应的特征向量为

$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求$A$.

解 由于A为实对称矩阵，所以A的属于不同特征值的特征向量两两正交. 设特征值3对应的特征向量为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

则

$$(\xi,x)=\mathbf{0}$$

即

$$x_1+x_2+x_3=0$$

解得基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

由于 ξ_1,ξ_2 不正交，将其正交化可得

$$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\quad \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

再单位化可得

$$p_1=\frac{1}{\|\xi\|}\xi=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix};\quad p_2=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix};\quad p_3=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

取正交矩阵

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ 且\ P^T=P^{-1},$$

则

$$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

因此

$$A=P\Lambda P^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

例 4. 23 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，且 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值，若

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

都是A的属于特征值6的特征向量.

（1）求A的另一特征值和对应的特征向量;

（2）求矩阵A.

解 （1）由于$\lambda_1=\lambda_2=6$是A的二重特征值，故A的属于特征值6的线性无关的特征向量有2个，即α_1,α_2为A的属于特征值6的线性无关的特征向量.

由于$r(A)=2$，可知$|A|=0$，因此可知A的另一特征值为$\lambda_3=0$.

设$\lambda_3=0$所对应的特征向量为

$$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

则有 $$(\alpha,\alpha_1)=0,\quad (\alpha,\alpha_2)=0,$$

即 $$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得基础解系为

$$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

因此A的对应于特征值$\lambda_3=0$的全部特征向量为$\xi=k\alpha$（$k\neq0$）.

（2）令

$$P=(\alpha_1,\alpha_1,\alpha)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

其中

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

因此

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

例 4. 24　用矩阵记号表示二次型 $f=x^2+4y^2+3z^2+4xy+2xz-2yz$.

解

$$f=(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

例 4. 25　求正交变换化将二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准型.

解　由于

$$f=(x_1,x_1,x_1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

则该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

令 $|A-\lambda E|=0$，即

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)=0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

当 $\lambda_3=5$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

由于特征值互不相同，故所对应的特征向量必两两正交，只需将其单位化即可.
记

$$\xi_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};\quad \xi_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_2\|}\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \xi_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_3\|}\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

取

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

使得

$$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.$$

例 4.26 将二次曲面方程 $4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2xz+2yz=1$ 化为标准方程，并判断其曲面类型.

解 设

$$f=4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2xz+2yz,$$

即

$$f=(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}，其中 A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

令 $|A-\lambda E|=0$，即

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&1&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&4-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(3-\lambda)^2=0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=6$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

利用施密特正交法将 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 正交化，可得

$$\beta_2=\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\quad \beta_3=\boldsymbol{p}_3-\frac{(\boldsymbol{p}_3,\beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix};$$

再将 p_1,β_2,β_3 单位化，可得

$$\xi_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix};\quad \xi_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix};\quad \xi_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则正交变换为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}.$$

使得

$$f=6x'^2+3y'^2+3z'^2.$$

则原方程化为标准方程$6x'^2+3y'^2+3z'^2=1$，可知曲面为旋转椭球面.

例 4.27　已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$（$a>0$），

通过正交变换化为标准型 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数a及所用的正交变换.

解　二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & a & 3\end{pmatrix},$$

由条件可知A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$，

则

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=2(9-a^2),$$

即

$$10=2(9-a^2)$$

解得　　$a=2$，$a=-2$（舍去）

当$\lambda_1=1$时，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

当$\lambda_2=2$时，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

当$\lambda_3=5$时，解齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

可得特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

由于特征值两两互异，则所对应特征向量必两两正交，故只需将特征向量单位化，即

$$\xi_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix};\quad \xi_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_2\|}\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \xi_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_3\|}\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

可得正交变换矩阵为

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

例 4. 28　判别下列二次型的正定性.

（1）$f=-2x^2-6y^2-4z^2+2xy+2xz$；

（2）$f=-x_1^2-x_2^2-x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$.

解　（1）该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

由于

$$a_{11}=-2<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0,$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0,$$

因此该二次型为负定二次型.

（2）该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix},$$

由于

$$a_{11}=3>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=10>0,$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=16>0,$$

因此该二次型为正定二次型.

例 4.29　设 $f=2x^2+ty^2+tz^2+4xy-4xz$ 正定，求 t 的取值范围.

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & t & 0\\ -2 & 0 & t\end{pmatrix},$$

其顺序主子式为

$$a_{11}=2>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & t\end{vmatrix}=2(t-2),\quad |A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & t & 0\\ -2 & 0 & t\end{vmatrix}=2t(t-4),$$

由于 f 正定，可得

$$\begin{cases}2(t-2)>0,\\ 2t(t-4)>0,\end{cases}$$

所以$t > 4$.

例 4. 30　试证：若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵.

证明　已知$\boldsymbol{A}$正定，则对于任何向量$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，恒有$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$. 要证$\boldsymbol{A}^{-1}$正定，即要证对于任何向量$\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$，恒有$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{y} > 0$.

而对于任何$\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$，可令$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，由于$\boldsymbol{A}$可逆，从而使可逆线性变换，

由$\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，可得

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{A}^{-1} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0,$$

因此$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵.

例 4. 31　设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$，试证：$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

证明　设λ为$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{x}$为与之相对应的特征向量，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$.
又因为

$$(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

且$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，所以

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

解得$\lambda = 1$或$\lambda = 2$.

由于$\boldsymbol{A}$的特征值全大于零，因此$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.